Oneindig in floating-pointaritmetiek

Johan Vervloet

18 februari 2003

Samenvatting

In dit korte tekstje wil ik twee problemen bespreken i.v.m. oneindig in floating-pointaritmetiek. Ten eerste is het resultaat 'oneindig' nietszeggend als het uit een berekening rolt. Ten tweede lijkt het teruggeven van een oneindige waarde bij deling door nul inconsistent te zijn met wat we anders van een implementatie zouden verwachten.

Vooraf

Om deze tekst te beperken tot zijn essentie, zullen we ervan uitgaan dat elk reëel getal binnen een interval $[-M, +M]$ representeerbaar is in ons computeraritmetisch model.[1]

1 De waarde oneindig is nietszeggend in floating-pointaritmetiek

1.1 Probleem

Zij M dus het grootste positieve getal dat we kunnen voorstellen. Bekijk nu deze uitdrukkingen :

uitdrukking	f.p. res.	reëel res.	
$2 \times M$	$+\infty$	$2M$	(groot, positief)
$M + 1 - M$	$+\infty$	1	(klein, positief)
$M + 1 - M - 2$	$+\infty$	-1	(klein, negatief)
$M + 1 - M - M$	$+\infty$	$-M + 1$	(groot, negatief)
$\log(M + 1 - M - M)$	$+\infty$	–	(niet gedef. in $\mathbb{R}$)

Hoewel de reële waarden die deze uitdrukkingen voorstellen zeer ver uit elkaar liggen, zal de berekening in floating-point aritmetiek iedere keer $+\infty$ als resultaat geven. Vandaar mijn stelling dat de wijze waarop $+\infty$ gebruikt wordt in de meeste floating-point implementaties niet interessant is.

[1] Je zou dit kunnen interpreteren als een verzameling floating-pointgetallen met oneindige precisie maar beperkt exponentbereik.

1.2 Voorgesteld alternatief

In plaats van 'geoverflowde' resultaten naar oneindig te flushen, zouden we er beter meteen $\rangle$IaR of $\langle$IaR van maken. De notatie IaR staat voor 'is a rational', en het gedrag van dit soort waarden wordt beschreven in de SpecialValue manual.[2]

2 Inconsistenties in het al dan niet continu maken van functies

In de punten $(x, 0)$ waar $x \in \mathbb{R}$ is de reële deling niet gedefinieerd. Maar we merken wel dat als $x \neq 0$

$$\lim_{y \to 0} \frac{x}{y} = \infty \tag{1}$$

en om die reden zal een floating point implementatie meestal een oneindige waarde teruggeven bij deling van een niet-nul getal door nul.

Langs de andere kant, wanneer we deze functies bekijken :

$$f(x) = \frac{x^2}{x} \tag{2}$$

$$g(x) = \frac{\sin(x)}{x} \tag{3}$$

dan zijn $f(0)$ en $g(0)$ ook niet gedefinieerd. Analoog kan men nochthans redeneren dat

$$\lim_{x \to 0} f(x) = 0 \tag{4}$$

$$\lim_{x \to 0} g(x) = 1 \tag{5}$$

maar blijkbaar verwacht men toch dat $f(0)$ of $g(0)$ een NaN resultaat genereert.

Blijkbaar wil men de functies wel continu hebben als de functiewaarde oneindig benadert, maar niet als ze een eindig getal benadert. We zouden ons kunnen afvragen of dit een goede manier van denken is, en, indien niet, of er alternatieven bestaan.

[2] zie http://win-www.uia.ac.be/u/cant/arithmos/downloads/libraries.php